Complexidade de Algoritmos Numéricos

Projeto e Relatório submetido ao CNPq,
Bolsa de Produtividade em Pesquisa (PQ) 2013.

Gregorio MALAJOVICH Munoz

Sumário

1. Resumo executivo

1.1. Resumo do projeto. Matemática é um dos ingredientes fundamentais da revolução tecnológica corrente:

> *(...) As more and more areas of science, engineering, medicine, business, and national defense rely on complex computer simulations and the analysis of expanding amounts of data, the mathematical sciences inevitably play a bigger role, because they provide the fundamental language for computational simulation and data analysis*[1] *(...)*

Algoritmos numéricos ou discretos são uma das principais interfaces entre Matemática e as suas aplicações.

O estudo geral da teoria dos algoritmos data de Turing (1936). O desenvolvimento clássico posterior privilegiou a teoria de algoritmos discretos. O problema aberto mais importante nessa vertente é a conjectura $P \neq NP$, hoje reconhecida como um dos problemas fundamentais da Matemática.

Não dispomos ainda de uma teoria satisfatória de complexidade, reduções e NP-completude para algoritmos numéricos, que são os algoritmos relevantes para a maioria das aplicações industriais.

Este projeto visa obter avanços em questões fundamentais sobre complexidade de algoritmos numéricos. Ele está dividido em quatro linhas de pesquisa, em diferentes estados de execução.

A primeira linha é o 17º Problema de Smale: produzir algoritmos eficientes, ou provar a impossibilidade destes, para resolver sistemas de polinômios densos. (Seção 2).

A segunda linha de pesquisa é o estudo de equações não lineares mais gerais (por exemplo, analíticas). Ocorre que essa teoria é relevante também para resolver sistemas de polinômios esparsos. (Seção 3).

Uma terceira linha neste projeto é a elaboração de uma teoria geral de complexidade, reduções e NP-completude para problemas numéricos, incluindo números de condicionamento. (Seção 4).

A quarta linha de pesquisa é a implementação de um programa resolvedor de sistemas de polinômios (Seção 5). Este é um projeto antigo, que pôde ser revitalizado devido aos avanços teóricos recentes nas duas primeiras linhas de pesquisa.

O resto deste resumo lista a equipe, publicações recentes e indicadores. Os resultados matemáticos obtidos recentemente são discutidos no corpo do texto. Considero que os mais importantes são os Teoremas 2.5 e 3.3, seguidos de 2.2 e 4.2.

Na Seção 6 são apresentados outros dados que podem ser relevantes à avaliação do projeto, assim como as necessidades reais de financiamento.

Pretendo argumentar que este é um projeto relevante de impacto científico internacional, e que se insere dentro de um movimento global em Matemática do qual o país não pode se excluir. Que por isso, este projeto merece um apoio substancialmente melhor do que uma bolsa do nível 2. Solicito encarecidamente aos Srs Pareceristas que se manifestem em relação a este nível em função dos critérios publicados pelo CNPq[2] e do quadro atual de bolsistas.

---

[1] National Academy of Sciences, *The Mathematical Sciences in 2025*, The National Academies Press, 2013.

[2] http://cnpq.br/web/guest/view/-/journal_content/56_INSTANCE_0oED/10157/49465

1.2. **Equipe.**

Estudantes:

Felipe Bottega Diniz	Mestrando
Yuri da Silva Villas Boas	Estudante de Iniciação Científica
Douglas Luizeto	Estudante de Iniciação Científica

Principais colaboradores externos:

Mike Shub	IMAS-CONICET e Universidad de Buenos Aires
Felipe Cucker	City University of Hong Kong
Carlos Beltrán	Universidad de Cantábria
Teresa Krick	Universidad de Buenos Aires
Diego Armentano	Universidad de la República

1.3. **Publicações recentes (2008–2013).**

Livro:

Malajovich, Gregorio. 2011. *Nonlinear equations*, Publicações Matemáticas do IMPA. [IMPA Mathematical Publications], Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), Rio de Janeiro. With an appendix by Carlos Beltrán, Jean-Pierre Dedieu, Luis Miguel Pardo and Mike Shub; 28º Colóquio Brasileiro de Matemática. [28th Brazilian Mathematics Colloquium]. MR2798351 (2012j:65148)

Artigos de pesquisa:

Malajovich, Gregorio. TA. *On the expected number of zeros of nonlinear equations*, Foundations of Computational Mathematics **Aceito**, disponível em `http://arxiv.org/abs/1106.6014`.

Dedieu, Jean-Pierre, Gregorio Malajovich e Michael Shub. 2013. *Adaptive step-size selection for homotopy methods to solve polynomial equations*, IMA J. Numer. Anal. **33**, n. 1, 1–29, DOI 10.1093/imanum/drs007. MR3020948

Beltrán, Carlos, Jean-Pierre Dedieu, Gregorio Malajovich e Mike Shub. 2012. *Convexity properties of the condition number II*, SIAM J. Matrix Anal. Appl. **33**, n. 3, 905–939, DOI 10.1137/100808885. MR3023457

Cucker, Felipe, Teresa Krick, Gregorio Malajovich e Mario Wschebor. 2012. *A numerical algorithm for zero counting. III: Randomization and condition*, Adv. in Appl. Math. **48**, n. 1, 215–248, DOI 10.1016/j.aam.2011.07.001. MR2845516

Beltrán, Carlos, Jean-Pierre Dedieu, Gregorio Malajovich e Mike Shub. 2009. *Convexity properties of the condition number*, SIAM J. Matrix Anal. Appl. **31**, n. 3, 1491–1506, DOI 10.1137/080718681. MR2587788 (2011c:65071)

Cucker, Felipe, Teresa Krick, Gregorio Malajovich e Mario Wschebor. 2009. *A numerical algorithm for zero counting. II. Distance to ill-posedness and smoothed analysis*, J. Fixed Point Theory Appl. **6**, n. 2, 285–294, DOI 10.1007/s11784-009-0127-4. MR2580979 (2011c:65317)

Cucker, Felipe, Teresa Krick, Gregorio Malajovich e Mario Wschebor. 2008. *A numerical algorithm for zero counting. I. Complexity and accuracy*, J. Complexity **24**, n. 5-6, 582–605, DOI 10.1016/j.jco.2008.03.001. MR2467589 (2010d:68063)

Dedieu, Jean-Pierre e Gregorio Malajovich. 2008. *On the number of minima of a random polynomial*, J. Complexity **24**, n. 2, 89–108, DOI 10.1016/j.jco.2007.09.003. MR2400310 (2009j:26015)

Artigos de divulgação

Malajovich, Gregorio. TA. *Newton iteration, conditioning and zero counting*, Contemporary Mathematics **aceito**.

Cucker, Felipe e Gregorio Malajovich. 2011. *Systems of polynomial equations*, Publ. Mat. Urug. **13**, 99–133. MR3013150

1.4. **Indicadores.** Os dez jornais mais citados em Matemática[3] (critério: fator de impacto de 5 anos) são:

	Nome	**ISSN**	**Impacto (1)**	**Score(2)**
1	ACTA MATH-DJURSHOLM	0001-5962	3.650	6.436
2	J AM MATH SOC	0894-0347	3.621	5.903
3	ANN MATH	0003-486X	3.402	5.426
4	B AM MATH SOC	0273-0979	3.411	3.522
5	COMMUN PUR APPL MATH	0010-3640	3.253	3.545
6	**FOUND COMPUT MATH**	1615-3375	2.863	3.901
7	INVENT MATH	0020-9910	2.829	4.665
8	MEM AM MATH SOC	0065-9266	2.407	3.055
9	PUBL MATH-PARIS	0073-8301	2.294	4.729
10	FIXED POINT THEORY A	1687-1812	2.059	0.513

O alto impacto obtido pelo J.FoCM (fundado em 2001) mostra a pujança da área e o alto interesse científico internacional do assunto. Reflete um movimento geral em Matemática, pelo qual aspectos algorítmicos e fundamentais da computação são reconhecidos não apenas pelo interesse matemático, mas ainda pelo potencial tecnológico latente.

Além do artigo aceito, sou autor em dois dos quatro artigos publicados por Brasileiros na referida publicação[4].

Meus índices individuais de citações são:

Fonte	Índice	Valor
MathSciNet	Total de Publicações	24
	Total de Citações	130
Thomson Reuters	Total de Publicações	23
	Total de Citações	149
	Total, sem auto-citações	123
	Índice h	7
Scopus	Total de Documentos	23
	Total de Citações	135
	Índice h	6
Google Scholar	Total de Citações	398
	Índice h	12

Esses índices podem ser comparados favoravelmente com os índices de pesquisadores trabalhando em tópicos de dificuldade similar.

[3] Fonte: Thomson Reuters, *ISI Web of Knowledge*, Journal Citation Reports, 2012 JCR Science Edition. (1) Fator de impacto de 5 anos. (2) *Aricle influence score*, citações em periódicos mais citados recebem peso maior.

[4] Fonte: Thomson Reuters, *ISI Web of Knowledge*, procura por *Publication: Foundations of Computational Mathematics, Address: Brazil*

2. Análise numérica de Sistemas de Polinômios

2.1. O 17º Problema de Smale.

Problema 2.1. (Smale, 1998) É possível encontrar um **zero aproximado** para um **sistema de n polinômios complexos em n variáveis** em **tempo médio polinomial**, com um **algoritmo uniforme**?

Pretendo explicar primeiro os termos técnicos em negrito, e depois detalhar alguns avanços obtidos e esperados.

Sistemas de polinômios. Seja $\mathcal{H}_d$ o espaço dos polinômios homogêneos complexos de grau d em $n+1$ variáveis. Como observado na formulação original, o Problema 2.1 se reduz trivialmente ao de encontrar zeros aproximados em $\mathbb{P}^{n+1}$ para sistemas de polinômios homogêneos.

Das várias maneiras usuais de se representar polinômios homogêneos, listo duas:

$$F(\mathbf{X}) = \sum_{\sum \mathbf{a}_i = d} F_{\mathbf{a}} X_0^{a_1} X_2^{a_2} \cdots X_n^{a_n} = \sum_{0 \le j_1, \dots, j_d \le n} S_{\mathbf{j}} X_{j_1} X_{j_2} \dots X_{j_n}.$$

Na segunda representação, assumimos que os $S_{\mathbf{j}}$ são os coeficientes de um tensor $S(\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \dots, \mathbf{Z})$ simétrico d-contravariante e que $F(\mathbf{X}) = S(\mathbf{X}, \dots, \mathbf{X})$. A norma

$$\|\mathbf{S}\|^2 = \sum_{0 \le j_1, \dots, j_d \le n} |S_{\mathbf{j}}|^2$$

é invariante por rotações unitárias.

O produto interno correspondente na representação polinomial

$$\langle F, G \rangle = \sum_{\sum a_i = d} F_{\mathbf{a}} \bar{G}_{\mathbf{a}} \frac{a_0! \dots a_n!}{d!}$$

foi definido por Weyl (1949) mas também é conhecido como produto interno de Bombieri. Subentendemos sempre esse produto interno para o espaço $\mathcal{H}_d$.

Esse produto interno faz de $\mathcal{H}_d$ um **espaço com núcleo reprodutor**. Se definimos $K_d(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \langle \mathbf{X}, \mathbf{Y} \rangle^d$ então

$$F(\mathbf{Y}) = \langle F(\cdot), K_d(\cdot, \mathbf{Y}) \rangle.$$

Se $\mathbf{d} = (d_1, \dots, d_n)$, o espaço dos sistemas de polinômios

$$\mathcal{H}_{\mathbf{d}} = \mathcal{H}_{d_1} \times \cdots \times \mathcal{H}_{d_n}$$

recebe o produto interno de espaço-produto.

Zeros aproximados. Seja $d(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \min \|\mathbf{X} - \lambda \mathbf{Y}\| / \|\mathbf{X}\|$ a métrica do espaço projetivo, i.e. o seno da distância Riemanniana projetiva.

Definimos também um operador de Newton, por exemplo

$$N(\mathbf{x}) = N(\mathbf{f}, \mathbf{x}) = x - D\mathbf{f}(\mathbf{x})|_{\mathbf{x}^\perp}^{-1}$$

(conhecido como operador de Newton projetivo).

Definição 2.1 (Smale)**.** Um **zero aproximado** para $\mathbf{F} \in \mathcal{H}_{\mathbf{d}}$ é um ponto $0 \ne \mathbf{Y} \in \mathbb{C}^{n+1}$ tal que a sequência $\mathbf{Y}_{i+1} = N(\mathbf{f}, \mathbf{Y}_i)$ verifica

$$d(\mathbf{Y}_i, \mathbf{Y}_{i+1}) \le 2^{-2^i+1} d(\mathbf{Y}_0, \mathbf{Y}_1).$$

Zeros aproximados existem (Smale, 1986) e podem ser certificados numericamente pela *teoria alfa*. Isso é descrito também em meu livro Malajovich (2011).

Agora podemos definir os demais termos técnicos do 17º Problema de Smale:

- **Algoritmo uniforme** se refere a um algoritmo no modelo de computação sobre um anel (Blum et al., 1998). O problema admite duas variantes: Pode-se exigir um algoritmo **determinista** ou aceitar um algoritmo **aleatorizado**.
- Um **sistema de polinômios** é um elemento de $\mathcal{H}_{\mathbf{d}}$. Vimos que esse espaço é dotado de um produto interno invariante pelo grupo unitário $U(n+1)$. Esse produto interno induz uma densidade de probabilidade Gaussiana, que transforma $\mathcal{H}_{\mathbf{d}}$ em um espaço de probabilidade. O *tamanho* da entrada é a dimensão desse espaço, ou seja $S = \sum_i \begin{pmatrix} n+d_i \\ d_i \end{pmatrix}$.
- *Tempo médio polinomial* significa que exite um polinômio $T(S)$ com a seguinte propriedade. Para toda escolha de $n, d_1, \dots, d_n$, assumimos a densidade de probabilidade Gaussiana no espaço $\mathcal{H}_{\mathbf{d}}$ respectivo. Então tempo de execução do algoritmo uniforme acima é uma variável aleatória, com média $\leq T(S)$.

O Problema 2.1 foi formulado após a sequência de artigos por Shub e Smale (1993a, 1993b, 1993c, 1996, 1994). O resultado final dessa série é que para cada $\mathcal{H}_{\mathbf{d}}$, existe um par $(\mathbf{F}_0, \mathbf{X}_0)$ tal que, para todo $\mathbf{F}_1$, existe uma sequência t_i tal que $t_N = 1$ e (2) produz um **zero aproximado** $\mathbf{X}_N$ para $\mathbf{F}_1$.

Os seguintes problemas ficaram em aberto:

(1) Como achar um bom par inicial $(\mathbf{F}_0, \mathbf{X}_0)$.
(2) Como gerar a sequência dos t_i's.

Desde então, os principais resultados no assunto são os seguintes:

- Beltrán (2006) produziu um algoritmo *aleatorizado* de tempo esperado polinomial, resolvendo uma das variantes do problema. (Beltrán e Pardo, 2008; 2009; Carlos Beltrán e Luis Miguel Pardo, 2011)
- (Bürgisser e Cucker, 2011) produziram um algoritmo *determinista* de tempo
$$(\dim \mathcal{H}_{\mathbf{d}})^{\log \log \dim \mathcal{H}_{\mathbf{d}}}.$$
(é *quase* polinomial).

2.2. **Métodos: algoritmos de homotopia.** A *variedade das soluções* é o conjunto de pares (problema, solução). Formalmente,

$$\mathcal{V} = \{(\mathbf{f}, \mathbf{x}) \in \mathbb{P}(\mathcal{H}_{\mathbf{d}}) \times \mathbb{P}^n : \mathbf{f}(\mathbf{x}) = 0\}.$$

Essa compactificação não é **sempre** necessária mas é extremamente conveniente. Nesta seção assumo a convenção seguinte: vetores são representados por maiúsculas ($\mathbf{X}$) e os pontos projetivos correspondentes por minúsculas ($\mathbf{x}$).

Seja $\mathrm{Aval}(\mathbf{F}, \mathbf{X})$ a avaliação de $\mathbf{F}$ em $\mathbf{X}$,

$$\mathrm{Aval}(\mathbf{F}, \mathbf{X}) = \begin{bmatrix} F_1(\mathbf{X}) \\ \vdots \\ F_n(\mathbf{X}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle F_1(\cdot), K_{d_1}(\cdot, \mathbf{X}) \rangle \\ \vdots \\ \langle F_n(\cdot), K_{d_n}(\cdot, \mathbf{X}) \rangle \end{bmatrix}$$

A i-ésima coordenada da função de avaliação é um polinômio em $F \in \mathcal{H}_{d_i}$ and $\mathbf{X} \in \mathbb{C}^n$, e é fácil ver que $D\mathrm{Aval}(\mathbf{F}, \mathbf{X})$ é sobrejetora. Logo $\mathcal{V}$ é uma variedade algébrica suave. Consideremos agora as duas projeções canônicas:

$$\pi_1 : \mathcal{V} \to \mathbb{P}(\mathcal{H}_{\mathbf{d}}) \qquad \text{e} \qquad \pi_2 : \mathcal{V} \to \mathbb{P}^n$$

Seja Σ o conjunto dos valores críticos de π_1. Segue-se do Teorema de Sard que Σ tem medida zero, e decorre da teoria da eliminação que Σ é um conjunto algébrico. π_1 é sobrejetora.

Portanto, para $\mathbf{F}_0$ e $\mathbf{F}_1$ genéricos, a linha complexa

$$(1-t)\mathbf{F}_0 + t\mathbf{F}_1$$

corta Σ em um número finito de valores (complexos) de t. Se exigimos que $t \in [0,1]$, o evento de $(\mathbf{F}_t)_{t\in[0,1]}$ cortar Σ é um evento de probabilidade zero. O Teorema do Levantamento se aplica e pode ser utilizado para resolver sistemas polinomiais.

Assumamos que $(\mathbf{F}_0, \mathbf{X}_0) \in \mathcal{V}$, $\mathbf{F}_0 \not\in \Sigma$. Então o Teorema da Função Implícita vale, e existem $\delta > 0$ e uma função $G : B(f_0, \delta) \to \mathbb{P}^n$ tais que

$$\begin{aligned} \mathrm{Aval}(\mathbf{F}, G(\mathbf{F})) &\equiv 0 \\ G(\mathbf{F}_0) &= \mathbf{X}_0 \end{aligned}$$

Para producir algoritmos de homotopia, é importante estimar δ. Nos primeiros artigos sobre o assunto isso era feito em termos de números de condicionamento.

Existem duas definições correntes de condicionamento. O **número de condicionamento não normalizado** mede a sensibilidade da solução (projetiva) $\mathbf{x}$ à entrada (projectiva) $\mathbf{f}$. É definido como $\|DG(\mathbf{f}, \mathbf{x})\|$, onde subentendemos a norma de operador de $DG(\mathbf{f}, \mathbf{x}) : T_f\mathbb{P}(\mathcal{H}_{\mathbf{d}}) \to T_x\mathbb{P}^n$.

Lema 2.1. *No contexto acima, sejam $F \in \mathcal{H}_{\mathbf{d}}$, $X \in \mathbb{C}^{n+1}$ representantes de $(\mathbf{f}, \mathbf{x}) \in \mathcal{V}$.*

$$\|DG(\mathbf{f}, \mathbf{x})\| = \|\mathbf{F}\| \left\| \left(\begin{bmatrix} \|\mathbf{X}\|^{-d_1+1} & & \\ & \ddots & \\ & & \|\mathbf{X}\|^{-d_n+1} \end{bmatrix} D\mathbf{F}(\mathbf{X})_{\mathbf{X}^\perp} \right)^{-1} \right\| \tag{1}$$

Demonstração. Diferenciamos G. Seja $(\mathbf{F}_t, \mathbf{X}_t)$ um caminho suave. Diferenciando a equação $\mathbf{F}_t(\mathbf{X}_t) \equiv 0$ obtem-se

$$D\mathbf{F}_t(\mathbf{X}_t)\dot{\mathbf{X}}_t + \dot{\mathbf{F}}_t(\mathbf{X}_t) = 0.$$

Logo,

$$DG(\mathbf{X}_t) : \dot{\mathbf{F}} \to -D\mathbf{F}_t(\mathbf{X}_t)^{-1} \begin{bmatrix} K_{d_1}(\cdot, \mathbf{X}_t)^* & & \\ & \ddots & \\ & & K_{d_n}(\cdot, \mathbf{X}_t)^* \end{bmatrix} \dot{\mathbf{F}}$$

O número de condicionamento e o lado direito de (1) são invariantes por mudanças de escala em $\mathcal{H}_{\mathbf{d}}$, em $\mathbb{C}^{n+1}$ e também por ação unitária $(\mathbf{f}, \mathbf{x}) \mapsto (\mathbf{f} \circ U^*, U\mathbf{x})$. Assim, podemos assumir sem perda de generalidade que $\|\mathbf{F}\| = 1$ e que $\mathbf{X} = e_0$. As contas são imediatas. $\square$

Shub e Smale definiram o **número de condicionamento normalizado**

$$\mu(\mathbf{f},\mathbf{x}) = \|\mathbf{F}\| \left\| \left(\begin{bmatrix} \frac{\|\mathbf{X}\|^{-d_1+1}}{\sqrt{d_1}} & & \\ & \ddots & \\ & & \frac{\|\mathbf{X}\|^{-d_n+1}}{\sqrt{d_n}} \end{bmatrix} D\mathbf{F}(\mathbf{X})_{\mathbf{X}^\perp} \right)^{-1} \right\|.$$

O operador $\mathcal{H}_{\mathbf{d}} \mapsto \mathcal{H}_{(1,\cdots,1)}$ dado por

$$\mathbf{F} \mapsto \begin{bmatrix} d_1^{-1/2}\|\mathbf{X}\|^{-d_1+1} \\ \ddots \\ d_n^{-1/2}\|\mathbf{X}\|^{-d_n+1} \end{bmatrix} D\mathbf{F}(\mathbf{X})_{\mathbf{X}^\perp}$$

é uma projeção isométrica. Esta definição torna o teorema de condicionamento verdadeiro:

Teorema 2.1. (Shub e Smale, 1993a) *O número de condicionamento $\mu(f, x)$ é igual à inversa da distância de f à variedade discriminante Σ ao longo da fibra dos sistemas que se anulam em x.*

A prova aparece também em Blum et al. (1998). Em Malajovich (2011) consegui uma generalização.

Note-se que

$$\|DG(\mathbf{f},\mathbf{x})\| \leq \mu(\mathbf{f},\mathbf{x}) \leq \sqrt{\max d_i}\|DG(\mathbf{f},\mathbf{x})\|$$

Um dos principais resultados de Shub e Smale nos anos 90 foi uma família de métodos de homotopia, com número de passos limitado por

$$\mathcal{O}\left(d(\mathbf{f}_0,\mathbf{f}_1) \max_{t\in[0,1]} \mu(\mathbf{f}_t,\mathbf{x}_t)^2 \; dt \right).$$

O procedimento geral era:

$$\mathbf{x}_{i+1} = N(\mathbf{f}_{t_{i+1}}, \mathbf{x}_{t_i}) \tag{2}$$

onde N representa uma certa iteração de Newton no espaço projetivo.

2.3. **Resultados obtidos: métrica do condicionamento.** A métrica do condicionamento apareceu em (Shub, 2009) na análise do número de passos para a homotopia.

Seja $(\mathcal{M}, \langle\cdot,\cdot\rangle_x)$ uma variedade Riemanniana suave e seja $\alpha : \mathcal{M} \to \mathbb{R}_{>0}$ uma função **Lipschitz**.

Podemos definir uma nova métrica na variedade M,

$$\langle\cdot,\cdot\rangle'_x = \alpha(x)\langle\cdot,\cdot\rangle_x$$

que é conforme em relação à anterior. Esta nova norma será chamada de **métrica α-metric** e às vezes de **métrica do condicionamento**. Ela define uma estrutura **Riemanniana Lipschitz** em $\mathcal{M}$.

Nosso estudo foi motivado pela métrica do condicionamento na variedade das soluções, que corresponde a $\alpha(f,x) = \mu(f,x)^2$. Dessa maneira, o comprimento de um caminho de homotopia levantado $(f_t, \zeta_t)_{t\in[a,b]}$ é dado por

$$L = \int_a^b \left(\left\| \frac{\partial f_t}{\partial t} \right\|_{f_t}^{1/2} + \left\| \frac{\partial \zeta_t}{\partial t} \right\|_{f_t}^{1/2} \right)^{1/2} \mu(f_t, \zeta_t) \mathrm{d}t$$

onde $\|u\|_x$ é a norma associada à métrica de Fubini.

Teorema 2.2. *(Dedieu, Malajovich e Shub, 2013) Assuma que $n \geq 2$ e $D = \max d_i \geq 2$. Dadas uma precisão $0 < \epsilon \leq 1/20$, um caminho de homotopia $(f_t)_{t\in[a,b]}$ de classe $\mathcal{C}^1$ em $\mathcal{H}_\mathbf{d}$ e um ponto inicial $0 \neq x_0 \in \mathbb{C}^{n+1}$ satisfazendo*

$$\frac{D^{3/2}}{2} \mu(f_a, x_0) \beta_0(f_a, x_0) < \frac{\epsilon^2}{2},$$

onde $\beta_0(f,x) = \|x\|^{-1} \|Df(x)|_{x^\perp}^{-1} f(x)\|$, então as seguintes condições são satisfeitas:

1. *x_0 é zero aproximado de f_a com um zero associado ζ_a.*
2. *Seja $(f_t, \zeta_t)_{t\in[a,b]}$ um levantamento contínuo de $(f_t)_{t\in[a,b]}$ na variedade das soluções passando por (f_a, ζ_a). Se o comprimento do condicionameto L é finito, então*

2a. *O algoritmo* **Homotopy** *do artigo com entrada $(\epsilon, (f_t), x_0)$ termina em no máximo*

$$k = 1 + 0.65 D^{3/2} \epsilon^{-2} L$$

iterações do loop *principal.*

2b. *Para todo $i = 1, \ldots, k$, x_i é zero aproximado de f_{t_i} associado ao zero exato ζ_{t_i}.*

Quando já suspeitavamos do resultado acima, definimos a noção mais geral de autoconvexidade:

Definição 2.2. Dizemos que α é **autoconvexa** se e somente se, para toda **geodésica** γ da estrutura α, $t \mapsto \log \alpha(\gamma(t))$ é uma função convexa.

Esta definição faz sentido para α de classe $\mathcal{C}^1$, de modo que a equação diferencial geodésica tenha solução. Quando α é apenas Lipschitz, uma **geodésica** é definida como um caminho absolutamente contínuo ($C^{1+\mathrm{Lip}} = W^{2,\infty}$) localmente minimizante, parametrizado por comprimento de arco em quase todos os pontos (Boito e Dedieu, 2010).

Os exemplos conhecidos de autoconvexidade são:

Teorema 2.3. *Seja $C \subset \mathbb{R}^n$ um corpo fechado convexo. Seja $\mathcal{M} = (\mathbb{R}^n \setminus C)$ e seja $\alpha : \mathbf{x} \mapsto d(\mathbf{x}, C)^{-2}$. Então α é auto-convexa.*

Teorema 2.4. *(Beltrán, Dedieu, Malajovich e Shub, 2009) Seja $N \subset \mathbb{R}^m$ variedade imersa (sem borda). Seja $\mathcal{M}$ o maior aberto em $\mathbb{R}^m \setminus N$ tal que cada ponto de $\mathcal{M}$ tenha um único ponto proximal em N. Seja $\alpha : \mathbf{x} \mapsto d(\mathbf{x}, \mathcal{N})^{-2}$. Então α é autoconvexa.*

O Teorema 2.3 segue imediatamente de Li e Nirenberg (2005) e do resultado acima.

Teorema 2.5. *(Beltrán, Dedieu, Malajovich e Shub, 2012) Seja $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ or $\mathbb{C}$. Seja $L(m,n) = \mathbb{K}^{m\times n}$ munida com o produto interno do traço, onde assume-se que $m \geq n$. Seja $\mathcal{M} = L(m,n) \setminus \{A : \mathrm{Rank}(A) < n\}$. Seja $\alpha : A \mapsto \|(A^*A)^{-1}\|$. Então α é auto-convexa.*

Mais exemplos são conhecidos, assim como alguns contraexemplos. (Beltrán et al., 2009; 2012).

2.4. **Perspectivas.** A introdução da métrica do condicionamento permite uma análise mais fina da complexidade de algoritmos de homotopia. A seguir listo algumas linhas de ataque para o 17º Problema de Smale:

Problema 2.2. Mostrar que $\mu(f,x)^2$ é autoconvexa na variedade das soluções, para sistemas polinomiais de grau arbitrário.

Se isso for verdade, então o par (f_t, x_t) pior condicionado vai estar nas extremidades, evitando as dificuldades decorrentes de se integrar o condicionamento ao longo do caminho.

Problema 2.3. Produzir em tempo polinomial caminhos de comprimento polinomial, na métrica do condicionamento.

Sabemos da existência desses caminhos (Beltrán e Shub, 2009). Não sabemos ainda como achá-los.

3. Teoria geral das equações não-lineares

A maioria dos exemplos de sistemas de polinômios que aparecem em problemas industriais ou científicos tem uma estrutura esparsa. Para ilustrar a diferença entre polinômios densos e esparsos, é conveniente relembrar dois teoremas famosos sobre o número esperado de soluções.

Teorema 3.1 (Bézout, XVIII)**.** *Sejam $f_1(x), \dots, f_n(x)$ polinômios a coeficientes reais ou complexos nas variáveis $x_1, \dots, x_n$, e de grau (respectivamente) $d_1, \dots, d_n$. Então o número de zeros isolados do sistema $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = 0$ em $\mathbb{C}^n$ é no máximo $d_1 d_2 \cdots d_n$. Essa cota é atingida para uma escolha genérica (i.e. em um aberto denso de Zariski) dos coeficientes.*

Um enunciado mais moderno contaria o número de soluções no espaço projetivo complexo $\mathbb{P}^n$, com multiplicidade (índice de interseção e grau da interseção). Nesse contexto, a cota passa a ser exata.

Polinômios esparsos residem no complemento do aberto mencionado no Teorema de Bézout.

Teorema 3.2. (Kušnirenko, 1976) *Seja A um subconjunto finito de $\mathbb{Z}^n_{\geq 0}$. Sejam $f_1(\mathbf{x}), \dots, f_n(\mathbf{x})$ polinômios a coeficientes reais ou complexos nas variáveis $x_1, \dots, x_n$, de* suporte *A:*

$$f_i = \sum_{\mathbf{a} \in A} f_{ia} x_1^{a_1} x_2^{a_2} \cdots x_n^{a_n} \ .$$

Então o número de zeros isolados do sistema $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = 0$ em $(\mathbb{C}^*)^n$ é no máximo $n!\mathrm{Vol}(\mathrm{Conv}(\mathrm{A}))$. Essa cota é atingida para uma escolha genérica (i.e. em um aberto denso de Zariski) dos coeficientes.

A cota é exata para zeros em uma certa variedade tórica, e contados com multiplicidade. O Teorema de Bernstein (Teorema 3.4 abaixo) generaliza esse resultado a sistemas de polinômios com suportes diferentes. Nesse caso, em termos de um invariante denominado *volume misto*, que generaliza o volume ordinário (Bernstein, 1975; Bernstein et al., 1976).

A motivação desta linha de pesquisa é transpor os resultados conhecidos sobre algoritmos de homotopia para sistemas de polinômios densos, ao caso esparso. As cotas mais finas dos Teoremas de Kushnirenko e Bernstein permitem esperar que algoritmos de homotopia esparsa sejam mais eficientes.

Algoritmos resolvendo o problema do valor inicial da homotopia foram propostos por (Li et al., 1989; Huber e Sturmfels, 1995), sem um estudo formal da complexidade. Resultados parciais foram obtidos em (Malajovich e Rojas, 2002; 2004). No entanto, o método da *invariância pelo grupo unitário* utilizado por (Shub e Smale, 1993a; 1993b; 1993c; 1996; 1994; Shub, 2009; Beltrán e Shub, 2009) (ver por exemplo Lema 2.1) já não está disponível.

Parte da matemática necessária para se entender algoritmos de homotopia fica mais clara se consideramos uma classe maior de espaços funcionais. Algumas das idéias geométricas são anteriores a (Gromov, 1990), mas parte do ferramental ainda está em desenvolvimento.

3.1. **Oligoespaços.** Como na teoria de complexidade para solução de sistemas de equações densos, o estudo de equações aleatórias, de seu número esperado de zeros e do condicionamento esperado têm um papel preponderante. Para ilustrar essa situação, consideremos o exemplo mais simples de equação analítica não polinomial:

$$\begin{aligned} f_{00} + f_{01}z + f_{02}z^2 + \cdots + f_{0d}z^d + \\ + f_{10}e^z + f_{11}ze^z + f_{12}z^2e^z + \cdots + f_{1d}z^de^z = 0. \end{aligned} \tag{3}$$

O número de soluções complexas de (3) é infinito, mesmo com $d = 0$. Mas faz sentido investigar o número de soluções em um subconjunto, por exemplo o disco $\mathcal{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$. Como o número de zeros depende dos coeficientes, vamos introduzir uma medida de probabilidade no espaço das equações (a distribuição de probabilidade normal com média zero e variância 1), e tratar o número $n_{\mathcal{D}}(f)$ de zeros de f em $\mathcal{D}$ como uma variável aleatória.

Por exemplo, o número esperado de soluções de (3) é

$$\mathbb{E}(n_{\mathcal{D}}(f)) = d/2 + 0{,}202.918.921.282\cdots \tag{4}$$

Ao escrever o livro (Malajovich, 2011), ficou patente que era possível unificar a prova desses teoremas, e que os métodos permitiam um ataque a um problema bem mais geral do que o de sistemas de polinômios, a saber sistemas de equações analíticas sobre uma variedade complexa. O preço módico a pagar por sair do domínio da geometria algébrica era trocar o número *genérico* de zeros pelo número *esperado* de zeros.

Em (Malajovich, TA) definimos a seguinte classe de espaços funcionais:

Definição 3.1. Um *espaço de oligonômios complexos* (ou *fewnomial spaces*) de funções sobre M é um espaço de Hilbert de funções holomorfas de M em $\mathbb{C}$, com as propriedades abaixo. Seja $V : M \to \mathcal{F}^*$ a forma de *avaliação* $V(\mathbf{z}) : f \mapsto f(\mathbf{z})$. Para todo $\mathbf{z} \in M$, exigimos que:

(1) $V(\mathbf{z})$ seja uma função linear contínua, e que
(2) $V(\mathbf{z})$ não seja a forma $f \mapsto 0$.

Dizemos que o oligoespaço é *não degenerado* se e somente se para todo $\mathbf{z} \in M$,

3. $P_{V(\mathbf{z})} DV(\mathbf{z})$ tem posto máximo,

onde P_W é a projeção ortogonal sobre $W^\perp$. (A derivação é em relação a $\mathbf{z}$).

Um exemplo clássico é o espaço de Bergman (funções analíticas em um domínio conexo e limitado de $\mathbb{C}^n$, com métrica L^2).

Oligoespaços admitem naturalmente um núcleo reprodutor. Uma operação de produto entre espaços de núcleo reprodutor foi estudada no famoso artigo de Aronszajn (1950).

Exemplo 3.1. Seja $\mathcal{P}_1$ o espaço dos polinômios univariados de grau 1, com produto interno $\langle f_1 z + f_0, g_1 z + g_0 \rangle_{\mathcal{P}_1} = f_1 \bar{g}_1 + f_2 \bar{g}_2$. Definimos indutivamente $\mathcal{P}_d = \mathcal{P}_{d-1}\mathcal{P}_1 = \mathcal{P}_1^d$. Então, obtemos o espaço dos polinômios univariados de grau d, com o produto interno de Weyl (Weyl, 1949):

$$\langle f, g \rangle_{\mathcal{P}_d} = \sum_{j=0}^{d} \frac{f_j \bar{g}_j}{\begin{pmatrix} d \\ j \end{pmatrix}}.$$

Se K é um conjunto mensurável em M, denotamos por $n_K(\mathbf{f})$ o número de zeros isolados de $\mathbf{f}$ em K.

Teorema 3.3. (Malajovich, TA) *Sejam $\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_n$ oligoespaços em M. Assumimos que todos os oligoespaços estão munidos da distribuição de probabilidade normal de média zero e variância 1. Seja $\mathcal{K} \subseteq M$ um conjunto mensurável. Então,*

$$\mathbb{E}_{f_1 \in \mathcal{F}_1, \dots, f_n \in \mathcal{F}_n}(n_{\mathcal{K}}(\mathbf{f}))$$

é o coeficiente de $\lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n$ no polinômio homogêneo de grau n na expressão formal

$$\frac{1}{n!}\mathbb{E}_{g_1, \dots, g_n \in \mathcal{F}_1^{\lambda_1}\mathcal{F}_2^{\lambda_2}\cdots\mathcal{F}_n^{\lambda_n}}(n_{\mathcal{K}}(\mathbf{g}))$$

Polinômios (ou agora *oligonômios*) aleatórios são importantes dentro do contexto de algoritmos de homotopia. Em geral, são bem condicionados (Li et al., 1989; Shub e Smale, 1993c; Malajovich e Rojas, 2002; 2004). Mas o estudo de polinômios aleatórios é um assunto clássico e ativo. A referência moderna sobre sistemas de polinômios aleatórios e 'campos' aleatórios é o livro de (Azaïs e Wschebor, 2009).

Artigos recentes do nosso grupo sobre o assunto incluem (Rojas, 1996; Dedieu e Malajovich, 2008; Armentano e Dedieu, 2009).

Existe outra tradição em probabilidade que é considerar funções analíticas aleatórias. A variância dos coeficientes é escolhida para que a distribuição dos zeros seja invariante por um certo grupo (Sodin, 2000; Sodin e Tsirelson, 2004). Existem conexões com processos pontuais determinantais ou *fermiônicos*) (Peres e Virág, 2005; Hough et al., 2009) e com (*pontos nodais*) de harmônicas aleatórias da esfera (Nazarov e Sodin, 2010).

O Teorema 3.3 engloba alguns desses resultados como exemplos particulares em 1 variável, e permite considerar problemas de dimensão maior.

Outra fonte de interesse sobre polinômios aleatórios são as estimativas assintóticas clássicas (Littlewood e Offord, 1943; 1945; Kac, 1943; 1949) obtidas mudando a escala do suporte.

Em várias variáveis, consideram-se sistemas de polinômios de Laurent da forma

$$f_i(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{a} \in A_i} f_{i\mathbf{a}} \mathbf{x}^{t\mathbf{a}}$$

onde t é um parâmetro de escala. A variável aleatória de interesse é $t^{-n} n_M(\mathbf{f})$. Shiffman e Zelditch (2004) conseguiram estimar a densidade das raízes em termos da forma de volume misto.

Kazarnovskii (Kazarnovskiĭ, 2004) obteve fórmulas mais gerais. Ele considerou oligonômios que são (após multiplicação das variáveis por $\sqrt{-1}$) transformada de Fourier de distribuições

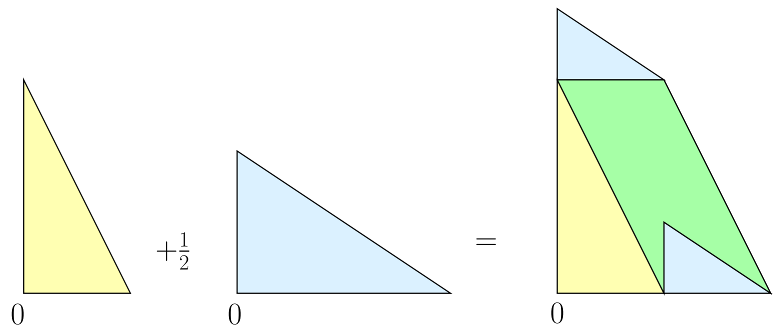

FIGURA 1. Combinação linear de Minkowski.

a suporte real compacto. general formulas. Por exemplo, (3) é transformada de Fourier de

$$\sum_{\substack{i=0,1 \\ j=0,\dots,d}} f_{ij} \frac{(-1)^j}{j!} \delta_i^{(j)}(y)$$

cujo suporte é $\{0, 1\}$.

Os corpos convexos dos Teoremas 3.2 e 3.4 abaixo são substituidos pelo fecho convexo do suporte das distribuições. Nesse sentido, ele generalizou o Teorema de Bernstein a objetos que não são nem polinômios nem somas exponenciais. No entanto, suas estimativas para (3) não levariam em conta diferentes valores de d. Esse é o motivo pelo qual as suas estimativas precisam ser assintóticas.

Nos últimos anos, Kaveh e Khovanskii (2010) e Kaveh e Khovanskii (2012) desenvolveram uma teoria da interseção para espaços de funções racionais sobre variedades projetivas irredutíveis. Os *oligoespaços* introduzidos em (Malajovich, TA) permitem generalizar alguns desses resultados ao contexto holomorfo.

3.2. Cálculo do volume misto e Geometria Algébrica tropical.

Definição 3.2 (Combinações lineares de Minkowski)**.** (Fig.1) Dados os conjuntos convexos $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_n$ e os coeficientes $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, a combinação linear $\lambda_1 \mathcal{A}_1 + \cdots + \lambda_n \mathcal{A}_n$ é o conjunto de todos os

$$\lambda_1 \mathbf{a}_1 + \cdots + \lambda_n \mathbf{a}_n$$

com $\mathbf{a}_i \in \mathcal{A}_i$.

Prova-se que:

Proposição 3.1. *Sejam $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_s$ subconjuntos compactos e convexos de $\mathbb{R}^n$. Sejam $\lambda_1, \dots, \lambda_s >$ 0. Então,*

$$\mathrm{Vol}(\lambda_1 \mathcal{A}_1 + \cdots + \lambda_s \mathcal{A}_s)$$

é um polinômio homogêneo de grau n in $\lambda_1, \dots, \lambda_s$.

Teorema 3.4. (Bernstein, 1975; Bernstein et al., 1976) *Sejam $A_1, \dots, A_n \subset \mathbb{Z}^n$ finitos. Seja $\mathcal{A}_i$ o fecho convexo de A_i. Seja B o coeficiente de $\lambda_1 \dots \lambda_n$ no polinômio*

$$\mathrm{Vol}(\lambda_1 \mathcal{A}_1 + \cdots + \lambda_n \mathcal{A}_n).$$

Então, o sistema de equações

$$\begin{aligned} \sum_{\mathbf{a} \in A_1} f_{1\mathbf{a}} \mathbf{z}^{\mathbf{a}} &= 0 \\ &\vdots \\ \sum_{\mathbf{a} \in A_n} f_{n\mathbf{a}} \mathbf{z}^{\mathbf{a}} &= 0 \end{aligned}$$

tem no máximo B soluções isoladas. Para valores genéricos dos coeficientes $f_{i\mathbf{a}}$*, ele tem exatamente B soluções isoladas em* $(\mathbb{C} \setminus \{0\})^n$.

O número $B/n!$ é conhecido como *volume misto* da n-upla $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_n$.

O cálculo do volume misto e de uma estrutura conhecida como *subdivisão mista* é um dos gargalos para a produção de software eficiente para resolver sistemas de polinômios esparsos. O volume misto pode ser exponencial no tamanho da descrição do problema mas, um algoritmo com cota de complexidade garantida da ordem ou polinomial no volume misto tornaria essa etapa mais rápida que a da homotopia.

Problema 3.1. Produzir um algoritmo *output sensitive* para calcular o volume misto.

O trabalho nesta linha de pesquisa já está avançado. O algoritmo utiliza idéias de Geometria Algébrica Tropical (Maclagan e Sturmfels, 2013) combinadas a técnicas clássicas de otimização e análise numérica.

4. Complexidade de algoritmos numéricos

O problema $P \neq NP$ é considerado um dos principais problemas em aberto para a comunidade matemática, e consta hoje da lista dos *problemas do milênio* do Instituto Clay.

Blum, Shub e Smale(1989) propuseram um modelo de computação sobre aneis, que permitiria obter versões mais gerais desse problema, e utilizar o ferramental matemático disponível (geometria algébrica, teoria dos números, etc...) A referência canônica para essa teoria é o livro por Blum, Cucker, Shub e Smale(1998).

Em particular, o modelo de computabilidade sobre o anel dos números reais foi proposto como um modelo para extender a teoria da complexidade à análise numérica. No entanto, trata de operações exatas com números reais, o que não é realista em se tratando de computações numéricas em precisão finita.

A abordagem usual em análise numérica é atribuir um número de condicionamento a cada problema numérico. Esse número mede a precisão necessária nos dados de entrada para obter uma aproximação suficientemente precisa. Ele é um invariante matemático do **problema**, e não do algoritmo. É razoável que o custo de se calcular a solução dependa (entre outros fatores) do número de condicionamento.

Por outro lado, o estudo das propriedades de condicionamento de problemas numéricos costuma ser feito caso a caso, sem a existência de uma teoria geral como a da **NP**-completude no caso discreto, ou no caso de complexidade sobre um anel.

Problema 4.1. Produzir uma teoria de complexidade (com classes análogas a **P** e **NP**, reduções e **NP**-completude para computação real levando em conta o número de condicionamento.

Participam deste projeto Felipe Cucker, Carlos Beltrán e Mike Shub.

4.1. **Resultados já obtidos e metodologia.** O projeto anterior (Cucker et al., 2008; 2009; 2012) era motivado pelo estudo da hierarquia polinomial das funções computáveis sobre os reais (modelo de Blum, Shub e Smale (1989). Ver também o livro-texto (Blum et al., 1998).

A classe $\#\mathcal{P}_{\mathbb{R}}$ é a classe de todas as funções h de $\mathbb{R}^\infty$ (união disjunta dos $\mathbb{R}^k$) em $\{0,1\}$, para as quais existe uma máquina de Blum-Shub-Smale real $M = M(y,z)$, funcionando em tempo polinomial no tamanho de $y \in \mathbb{R}^\infty$, e aceitando exatamente $h(y)$ entradas (y,z) com $z \in \mathbb{R}^\infty$ (Meer, 2000). Note-se a inclusão trivial $\mathcal{P}_{\mathbb{R}} \subseteq \mathcal{NP}_{\mathbb{R}} \subseteq \#\mathcal{P}_{\mathbb{R}}$.

Sabe-se que a função $\#_{\mathbb{R}}$, que a cada entrada f codificando um sistema de n polinômios a n incógnitas, associa o número de soluções reais, é $\#\mathcal{P}_{\mathbb{R}}$-completa.

Algoritmos de complexidade exponencial para calcular $\#_{\mathbb{R}}$ são conhecidos desde Tarski (mas houve progressos recentes). Um algoritmo de complexidade polinomial implicaria $\mathcal{P}_{\mathbb{R}} = \mathcal{NP}_{\mathbb{R}}$.

É conveniente homogeneizar o sistema de polinômios. Assim, podemos considerar que f é um sistema de n polinômios em $n+1$ variáveis, e vamos contar soluções na esfera unitária.

$$\mu_{\mathrm{norm}}(f,x) = \|f\|\sqrt{n}\left\| Df(x)^{-1}_{|T_x\mathbb{S}^n} \begin{bmatrix} \sqrt{\mathrm{grau}(f_1)} & & \\ & \cdots & \\ & & \sqrt{\mathrm{grau}(f_n)} \end{bmatrix} \right\|$$

onde a primeira norma é a norma $U(n+1)$-invariante de Weyl e a segunda é a norma de operador.

Nosso número de condicionamento é definido como:

$$\kappa(f) = \max_{x\in\mathbb{S}^n} \min\left\{ \mu_{\mathrm{norm}}(f,x), \frac{\|f\|}{\|f(x)\|_\infty} \right\}.$$

O principal resultado de (Cucker et al., 2008) é:

Teorema 4.1. *Existe um algoritmo iterativo, com entrada f no espaço $\mathcal{H}_d$ de sistemas de polinômios homogêneos de grau $d_1,\dots,d_n$, que*

(1): *Calcula $\#_{\mathbb{R}}(f)$.*

(2): *O número de iterações é $O(\log(n(\max d_i)\kappa(f)))$ iterações, cada uma custando o*

$$O\left(\log(n(\max d_i)\kappa(f))(n+1)^2\left(\frac{(n+1)(\max d_i)^2\kappa(f)^2}{\alpha_*}\right)^{2n}\right)$$

operações aritméticas. Aqui, $\alpha_* \simeq 0.03884629388$ é uma constante universal. item [(3)] Pode ser bem paralelizado, no sentido que admite versões paralelas com tempo de execução

$$O\left(n^2\log(n(\max d_i)\kappa(f))\left(\log\left(n(\max d_i)\kappa(f)\right)^2 - \log(\alpha_*)^2\right)\right)$$

e número de processadores exponenciais nessa quantidade.

(4): *Pode ser implementado em precisão finita (...)*

(5): *Pode ser modificado para retornar um* zero aproximado *em relação à iteração de Newton, para cada solução.*

Faltava analisar o número de condicionamento do algoritmo acima. Para isso, substituimos o número de condicionamento $\kappa(f)$ por uma expressão $\tilde{\kappa}(f)$ mais conveniente, com

$$\frac{\tilde{\kappa}(f)}{\sqrt{n}} \leq \kappa(f) \leq \sqrt{2n}\tilde{\kappa}(f).$$

Com essa modificação, obtivemos em (Cucker, Krick, Malajovich e Wschebor, 2009) um teorema de condicionamento:

Teorema 4.2. *Para todo f, $\tilde{\kappa}(f) = \|f\|/\mathrm{dist}(f, \Sigma_{\mathbb{R}})$, onde $\Sigma_{\mathbb{R}}$ é a variedade discriminante e* dist *denota a distância projetiva.*

O paradigma da *smoothed analysis* é substituir uma entrada f por uma perturbação aleatória, mas pequena.

Para isso, atribuimos à bola de centro f e raio σ distribuição de probabilidade uniforme, e consideramos uma perturbação $g \in B(f, \sigma)$ aleatória de f.

A partir do resultado anterior, mostramos que:

Corolário 4.1. *Sejam $D = \max \mathrm{grau}(f_i)$ e $\mathcal{D} = \prod(\mathrm{grau}(f_i))$. Seja $N+1$ o número de coeficientes de f. Para todo $\sigma \in (0, 1]$ e todo $t \geq (4n\mathcal{D}^2 + 1)\frac{N}{\sigma}$,*

$$\sup_{f \in \mathbb{P}(\mathbb{H}_d)} \mathrm{Prob}_{g \in B(f,\sigma)}\{\tilde{\kappa}(g) \geq t\} \leq 13n^2 D\mathcal{D}N\frac{1}{\sigma t}$$

e

$$\sup_{f \in \mathbb{P}(\mathcal{H}_d)} \mathbb{E}_{g \in B(f,\sigma)}[\ln \tilde{\kappa}(g)] \leq 2\ln N + 4\ln n + 2\ln \mathcal{D} + \ln D + \ln\left(\frac{1}{\sigma}\right) + 6.$$

Em particular, fazendo $\sigma = 1$, obtemos: para todo $t \geq N(4n\mathcal{D}^2 + 1)$,

$$\mathrm{Prob}_{g \in \mathbb{P}^N}\{\tilde{\kappa}(g) \geq t\} \leq 13n^2 D\mathcal{D}N\frac{1}{t} \tag{5}$$

e

$$\mathbb{E}_{g \in \mathbb{P}^N}[\ln \tilde{\kappa}(g)] \leq 2\ln N + 4\ln n + 2\ln \mathcal{D} + \ln(D) + 6. \tag{6}$$

As equações (5) e (6) foram obtidas particularizando o resultado de *smoothed analysis*. No terceiro artigo da série, mostramos que:

Teorema 4.3. *Seja f um sistema de polinômios homogêneos aleatórios Gaussianos com média 0 e variância 1, em relação ao produto interno invariante de Weyl. Assuma que $n \geq 3$. Então,*

(i): *Para $a > 4\sqrt{2}\,\mathbf{D}^2 n^{7/2} N^{1/2}$ temos que*

$$\mathbb{P}\big(\kappa(f) > a\big) \leq K_n \frac{\sqrt{2n}(1 + \ln(a/\sqrt{2n}))^{1/2}}{a},$$

onde $\mathbf{D}$ é o número de Bézout (produto dos graus), $\mathcal{D}$ o maior dos graus, N a dimesnão do espaço de sistemas de polinômios com esses graus e $K_n := 8\mathbf{D}^2\mathcal{D}^{1/2}N^{1/2}n^{5/2} + 1$.

(ii):

$$\mathbb{E}(\ln \kappa(f)) \leq \ln K_n + (\ln K_n)^{1/2} + (\ln K_n)^{-1/2} + \frac{1}{2}\ln(2n).$$

4.2. **Perspectivas.** Precisamos ainda de uma definição geral de problema numérico (temos neste momento 4 candidatas), de uma definição de redução polinomial que inclua o número de condicionamento (há várias possibilidades), e de exemplos não triviais. Este projeto ainda está na etapa exploratória.

5. Implementação e aplicações

A descoberta da métrica do condicionamento e os avanços obtidos no cômputo do volume misto tornam viável ressucitar o projeto de um programa para resolver sistemas de equações polinomiais genêricos. A versão anterior é (Malajovich, 2003) que nunca chegou a ser competitivo.

Em particular, o procedimento para cálculo do volume misto está implementado. O desenvolvimento de métodos numéricos para calcular volumes mistos é um assunto competitivo. Os principais resultados são (Gao e Li, 2000; Li e Li, 2001; Gao et al., 2005; Mizutani et al., 2007; Lee e Li, 2011).

Problema 5.1. Produzir uma implementação competitiva do algoritmo para volume misto.

Experimentos preliminares sugerem que a implementação atual seria competitiva, mas ainda são possíveis melhorias.

Outro problema a ser explorado é o seguinte:

Problema 5.2. Produzir um algoritmo de homotopia preditor-corretor de ordem 1, com custo limitado em termos da métrica do condicionamento.

Um resultado formal nesse sentido poderia representar mais uma maneira de atacar o 17º Problema de Smale.

6. Relevância, Recursos humanos, Coordenação de Redes e Gestão Científico-acadêmica

6.1. **Relevância tecnológica.** A relevância científica da minha proposta e deste assunto de pesquisa é atestada pelas publicações, citações, colaboradores envolvidos e referências citadas. Nesta subseção gostaria de mencionar as aplicações tecnológicas de uma das linhas, a solução numérica de sistemas de polinômios.

Ela se insere dentro de uma área maior, que inclui geometria algébrica computacional e outras áreas correlatas. A SIAM *Society for Industrial and Applied Mathematics* abriu um grupo de interesse na área. De acordo com a página do grupo, as aplicações incluem:

> *biology, coding theory, cryptography, computer graphics, quantum computing, control theory, geometric design, complexity theory, machine learning, optimization, robotics, computational geometry, and statistics.*[5]

Quero citar duas aplicações específicas de alta tecnologia. Uma delas é a descoberta de novos medicamentos.

[5]SIAM, http://www.siam.org/activity/ag/

> *(...)Recent data suggest the average cost for a drug approval is now between $400 million to $1 billion. One main reason for these soaring costs is the high attrition rate of drugs in Phase 2 clinical trials.*[6]*(...)*

Eventualmente, simulações numéricas ou até mesmo um estudo de pontos fixos[7], poderiam representar economias substanciais.

A segunda aplicação é um problema de radar além do horizonte. Trata-se de um problema completamente diferente, que é reconstruir uma matriz de covariância a partir de certos dados. Mas compartilha alguns formalismos matemáticos similares a nossa teoria de autoconvexidade (Wiesel, 2012).

6.2. **Formação de recursos humanos.** Participo do Programa Especial de Matemática (similar a um programa de *honors*) que oferece cursos de matemática de bom nível para alunos de graduação. Um exemplo de curso oferecido é o de Álgebra Linear. Meu livro[8] é coberto de capa a capa quando temos uma turma boa.

No Mestrado, orientei as seguintes dissertações:

Jorge Icaro Condado Jauregui. 22 de maio de 1998. *Volume misto e generalizações do teorema de Bernshtein*, Dissertação de Mestrado, Universidade Federal do Rio de Janeiro.

Bruno do Nascimento Morier. 23 de janeiro de 2004. *Volume misto e teorema de Bernstein*, Dissertação de Mestrado, Universidade Federal do Rio de Janeiro.

Vinicius Gripp Barros Ramos. Julho de 2007. *Curvas Algébricas e Geometria Tropical*, Dissertação de Mestrado, Universidade Federal do Rio de Janeiro, http://teses.ufrj.br/IM_M/ViniciusGrippBarrosRamos.pdf.

Caio Guimarães Souza. Agosto de 2010. *Estimativas sobre a convergência da iteração de Graeffe tangente*, Dissertação de Mestrado, Universidade Federal do Rio de Janeiro, http://www.pg.im.ufrj.br/teses/Matematica/Mestrado/307.pdf.

Dos ex-alunos, Jorge voltou ao seu país (já era Professor Universitário), Bruno Morier trabalha para o Banco Itaú, Vinicius acaba de concluir Doutorado na Universidade da Califórnia em Berkeley e Caio se encontra no exterior.

Aluns dos meus alunos de Mestrado (potenciais alunos bons de Doutorado) decidiram ir para o mercado financeiro, e dois doutorandos deixaram o curso após ser contratados pelo governo federal (Institutos Federais de Educação/CEFETs).

Embora nunca tenha recusado um candidato ao Doutorado, já sofri ataques virulentos por não ter teses orientadas. Por isso, gostaria de mencionar os seguintes fatos:

(1) O Programa de pós-graduação em Matemática da UFRJ tem hoje 51 docentes.
(2) Nos últimos 5 anos, concluiram 38 doutores, a maioria em áreas do conhecimento tradicionais como Equações a Derivadas Parciais, ou Sistemas Dinâmicos.
(3) A UFRJ não proporciona alojamento ou ajuda de custo a estudantes externos, de maneira que o fluxo de alunos é limitado pelo custo de vida local no Rio de Janeiro.

[6] Michael Zager, Systems Pharmacology: Current Applications of Mathematics in Pharmaceutical R&D, SIAM annual meeting AN13 abstracts p.51, http://www.siam.org/meetings/an13/an13-ct13_abstracts.pdf

[7] Gilles Gnacadja, Polynomial Systems in Receptor Pharmacology

[8] http://www.labma.ufrj.br/ gregorio/livro/al2.pdf

(4) A permanência ou não do aluno da UFRJ após concluir graduação ou mestrado é decisão individual do aluno. Exportamos bons alunos para outras áreas do conhecimento, para outras instituições e também para o exterior.
(5) O número de orientações depende também de condições institucionais e da área de trabalho.

O que posso oferecer para potenciais doutorandos são as oportunidades, os desafios e os riscos inerentes às áreas novas do conhecimento. Alunos entrando na área de complexidade de algoritmos numéricos precisam ser capazes de aprender lendo artigos de pesquisa (as referências deste projeto, e algumas das suas referências). Ao fazer isso estão optando pelo caminho da dificuldade.

Uma melhor aceitação de assuntos emergentes de relevância internacional por parte do *establishment* matemático Brasileiro e do CNPq poderia sinalizar a eventuais alunos que esse caminho é viável e socialmente aceito. Até agora tenho experimentado o contrário.

6.3. **Coordenação de redes de pesquisa e inserção internacional.** Coordenei o projeto *Deterministic and Probabilistic Complexity of Algorithms for Solving Equations*, financiado pelo acordo MathAmSud. O projeto esteve vigente no biênio 2011–2012, sendo vedada a renovação.

A descrição do projeto, equipe, resultados está disponível na minha página, http://www.labma.ufrj.br/~gregorio/mathamsud/

O valor total do projeto (incluindo CAPES, CNRS, ANII, MAEE, MINCYT) é estimado em € 22.736,62.

Também foi realizada uma mini-conferência (Paraty RJ, 16 a 20 de abril de 2012) http://www.labma.ufrj.br/~gregorio/conferences/complexity2012/ com fundos do projeto, mais aportes do CNPq e da UFRJ.

6.4. **Gestão Científica e Acadêmica.** Fui membro do Colegiado do Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada (2004-2010) e do Programa de Pós-Graduação em Matemática (2005-2010), e negociei a unificação dos programas.

6.5. **Financiamento.** Fui agraciado pelo Edital Universal do CNPq em 2004, 2007, 2009, 2011. O valor concedido para o biênio 2012–2013 é foi de R$12.000,68.

Consegui também apoio ide R$10.000,00 da FAPERJ (Fundação Carlos Chagas de Amparo à Pesquisa do Estado do Rio de Janeiro) em 2009. Lamentavelmente a FAPERJ transformou os pedidos de passagens internacionais em nacionais. Não consegui reverter a situação, e precisei portanto devolver 87% da verba concedida.

As regras do Edital Universal foram modificadas abruptamente, impedindo que beneficiários do edital 2011 solicitem renovação.

Por outro lado, o fato de nossa equipe de pesquisa estar geograficamente dispersa exige uma quantidade razoável de deslocamentos. Por exemplo, tenho 5 deslocamentos realizados ou previstos para 2013. Esse é o custo de se fazer pesquisa de relevância internacional. Ainda considero que eu deveria participar de mais conferências para divulgar os nossos resultados, mas os recursos financeiros alocados não permitem.

Assim, a eventual não concessão de taxa de bancada reduziria meu orçamento de custeio de 2014 para R$0,00. Isso poderá atrasar significativamente as pesquisas e comprometer a integridade da equipe.

Referências

Armentano, Diego e Jean-Pierre Dedieu. 2009. *A note about the average number of real roots of a Bernstein polynomial system*, J. Complexity **25**, n. 4, 339–342, DOI 10.1016/j.jco.2009.03.001. MR2542034 (2010k:60196)

Aronszajn, N. 1950. *Theory of reproducing kernels*, Trans. Amer. Math. Soc. **68**, 337–404. MR0051437 (14,479c)

Azaïs, Jean-Marc e Mario Wschebor. 2009. *Level sets and extrema of random processes and fields*, John Wiley & Sons Inc., Hoboken, NJ. MR2478201 (2010m:60003)

Beltrán, Carlos. 2006. *Sobre el problema 17 de Smale: Teoría de la Intersección y Geometría Integral*, PhD Thesis, Universidad de Cantábria, `http://sites.google.com/site/beltranc/publications`.

Beltrán, Carlos, Jean-Pierre Dedieu, Gregorio Malajovich e Mike Shub. 2009. *Convexity properties of the condition number*, SIAM J. Matrix Anal. Appl. **31**, n. 3, 1491–1506, DOI 10.1137/080718681. MR2587788 (2011c:65071)

Beltrán, Carlos, Jean-Pierre Dedieu, Gregorio Malajovich e Mike Shub. 2012. *Convexity properties of the condition number II*, SIAM J. Matrix Anal. Appl. **33**, n. 3, 905–939, DOI 10.1137/100808885. MR3023457

Beltrán, Carlos e Luis Miguel Pardo. 2008. *On Smale's 17th problem: a probabilistic positive solution*, Found. Comput. Math. **8**, n. 1, 1–43, DOI 10.1007/s10208-005-0211-0. MR2403529 (2009h:65082)

Beltrán, Carlos e Luis Miguel Pardo. 2009. *Smale's 17th problem: average polynomial time to compute affine and projective solutions*, J. Amer. Math. Soc. **22**, n. 2, 363–385, DOI 10.1090/S0894-0347-08-00630-9. MR2476778 (2009m:90147)

Carlos Beltrán e Luis Miguel Pardo. 2011. *Fast linear homotopy to find approximate zeros of polynomial systems*, Foundations of Computational Mathematics **11**, 95–129.

Beltrán, Carlos e Michael Shub. 2009. *Complexity of Bezout's theorem. VII. Distance estimates in the condition metric*, Found. Comput. Math. **9**, n. 2, 179–195, DOI 10.1007/s10208-007-9018-5. MR2496559 (2010f:65100)

Bernstein, D. N. 1975. *The number of roots of a system of equations*, Funkcional. Anal. i Priložen. **9**, n. 3, 1–4 (Russian). MR0435072 (55 #8034)

Bernstein, D. N., A. G. Kušnirenko e A. G. Hovanskiĭ. 1976. *Newton polyhedra*, Uspehi Mat. Nauk **31**, n. 3(189), 201–202 (Russian). MR0492376 (58 #11500)

Blum, Lenore, Felipe Cucker, Michael Shub e Steve Smale. 1998. *Complexity and real computation*, Springer-Verlag, New York. With a foreword by Richard M. Karp. MR1479636 (99a:68070)

Blum, Lenore, Mike Shub e Steve Smale. 1989. *On a theory of computation and complexity over the real numbers: NP-completeness, recursive functions and universal machines*, Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) **21**, n. 1, 1–46, DOI 10.1090/S0273-0979-1989-15750-9. MR974426 (90a:68022)

Boito, Paola e Jean-Pierre Dedieu. 2010. *The condition metric in the space of rectangular full rank matrices*, SIAM J. Matrix Anal. Appl. **31**, n. 5, 2580–2602, DOI 10.1137/08073874X. MR2740622

Bürgisser, Peter e Felipe Cucker. 2011. *On a problem posed by Steve Smale*, Ann. of Math. (2) **174**, n. 3, 1785–1836, DOI 10.4007/annals.2011.174.3.8. MR2846491

Peter Bürgisser e Felipe Cucker. 2013. *Condition: The Geometry of Numerical Algorithms*, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, vol. 349, Springer-Verlag.

Cucker, Felipe, Teresa Krick, Gregorio Malajovich e Mario Wschebor. 2008. *A numerical algorithm for zero counting. I. Complexity and accuracy*, J. Complexity **24**, n. 5-6, 582–605, DOI 10.1016/j.jco.2008.03.001. MR2467589 (2010d:68063)

Cucker, Felipe, Teresa Krick, Gregorio Malajovich e Mario Wschebor. 2009. *A numerical algorithm for zero counting. II. Distance to ill-posedness and smoothed analysis*, J. Fixed Point Theory Appl. **6**, n. 2, 285–294, DOI 10.1007/s11784-009-0127-4. MR2580979 (2011c:65317)

Cucker, Felipe, Teresa Krick, Gregorio Malajovich e Mario Wschebor. 2012. *A numerical algorithm for zero counting. III: Randomization and condition*, Adv. in Appl. Math. **48**, n. 1, 215–248, DOI 10.1016/j.aam.2011.07.001. MR2845516

Dedieu, Jean-Pierre e Gregorio Malajovich. 2008. *On the number of minima of a random polynomial*, J. Complexity **24**, n. 2, 89–108, DOI 10.1016/j.jco.2007.09.003. MR2400310 (2009j:26015)

Dedieu, Jean-Pierre, Gregorio Malajovich e Michael Shub. 2013. *Adaptive step-size selection for homotopy methods to solve polynomial equations*, IMA J. Numer. Anal. **33**, n. 1, 1–29, DOI 10.1093/imanum/drs007. MR3020948

Gao, Tangan e T. Y. Li. 2000. *Mixed volume computation via linear programming*, Taiwanese J. Math. **4**, n. 4, 599–619. MR1799755 (2001j:65026)

Gao, Tangan, T. Y. Li e Mengnien Wu. 2005. *Algorithm 846: MixedVol: a software package for mixed-volume computation*, ACM Trans. Math. Software **31**, n. 4, 555–560, DOI 10.1145/1114268.1114274. MR2272345 (2007j:65059)

Gromov, M. 1990. *Convex sets and Kähler manifolds*, Advances in differential geometry and topology, World Sci. Publ., Teaneck, NJ, pp. 1–38. MR1095529 (92d:52018)

Hough, J. Ben, Manjunath Krishnapur, Yuval Peres e Bálint Virág. 2009. *Zeros of Gaussian analytic functions and determinantal point processes*, University Lecture Series, vol. 51, American Mathematical Society, Providence, RI. MR2552864 (2011f:60090)

Huber, Birkett e Bernd Sturmfels. 1995. *A polyhedral method for solving sparse polynomial systems*, Math. Comp. **64**, n. 212, 1541–1555, DOI 10.2307/2153370. MR1297471 (95m:65100)

Kac, M. 1943. *On the average number of real roots of a random algebraic equation*, Bull. Amer. Math. Soc. **49**, 314–320. MR0007812 (4,196d)

Kac, M. 1949. *On the average number of real roots of a random algebraic equation. II*, Proc. London Math. Soc. (2) **50**, 390–408. MR0030713 (11,40e)

Kaveh, Kiumars e A. G. Khovanskii. 2010. *Mixed volume and an extension of intersection theory of divisors*, Mosc. Math. J. **10**, n. 2, 343–375, 479 (English, with English and Russian summaries). MR2722802 (2012a:14014)

Kaveh, Kiumars e A. G. Khovanskii. 2012. *Newton-Okounkov bodies, semigroups of integral points, graded algebras and intersection theory*, Ann. of Math. (2) **176**, n. 2, 925–978, DOI 10.4007/annals.2012.176.2.5. MR2950767

Kazarnovskiĭ, B. Ya. 2004. *"Newton polyhedra" of generalized functions*, Izv. Ross. Akad. Nauk Ser. Mat. **68**, n. 2, 53–70, DOI 10.1070/IM2004v068n02ABEH000475 (Russian, with Russian summary); English transl.,. 2004, Izv. Math. **68**, n. 2, 273–289. MR2058000 (2005c:30006)

Kušnirenko, A. G. 1976. *Newton polyhedra and Bezout's theorem*, Funkcional. Anal. i Priložen. **10**, n. 3, 82–83. (Russian). MR0422272 (54 #10263)

Lee, Tsung-Lin e Tien-Yien Li. 2011. *Mixed volume computation in solving polynomial systems*, Randomization, relaxation, and complexity in polynomial equation solving, Contemp. Math., vol. 556, Amer. Math. Soc., Providence, RI, pp. 97–112, DOI 10.1090/conm/556/11009, (no prelo). MR2882664 (2012k:52019)

Li, T. Y. e Xing Li. 2001. *Finding mixed cells in the mixed volume computation*, Found. Comput. Math. **1**, n. 2, 161–181, DOI 10.1007/s102080010005. MR1830034 (2002b:65030)

Li, Yanyan e Louis Nirenberg. 2005. *Regularity of the distance function to the boundary*, Rend. Accad. Naz. Sci. XL Mem. Mat. Appl. (5) **29**, 257–264. MR2305073 (2008d:35021)

Li, T. Y., Tim Sauer e J. A. Yorke. 1989. *The cheater's homotopy: an efficient procedure for solving systems of polynomial equations*, SIAM J. Numer. Anal. **26**, n. 5, 1241–1251, DOI 10.1137/0726069. MR1014884 (90m:65105)

Littlewood, J. E. e A. C. Offord. 1943. *On the number of real roots of a random algebraic equation. III*, Rec. Math. [Mat. Sbornik] N.S. **12(54)**, 277–286 (English, with Russian summary). MR0009656 (5,179h)

Littlewood, J. E. e A. C. Offord. 1945. *On the distribution of the zeros and a-values of a random integral function. I*, J. London Math. Soc. **20**, 130–136. MR0019123 (8,372d)

Maclagan, Diane e Bernd Sturmfels. 2013. *Introduction to Tropical Geometry*. Draft, chapters 1–3.

Malajovich, Gregorio. 2003. *pss3.0.5 Polynomial System Solver*. `http://www.labma.ufrj.br/~gregorio/software.php`.

Malajovich, Gregorio. 2011. *Nonlinear Equations*, Publicações de Matemática, 28º Colóquio Brasileiro de Matemática, IMPA, Rio de Janeiro.

Malajovich, Gregorio. TA. *On the expected number of zeros of nonlinear equations*, Foundations of Computational Mathematics **Aceito**, disponível em `http://arxiv.org/abs/1106.6014`.

Malajovich, Gregorio e J. Maurice Rojas. 2002. *Polynomial systems and the momentum map*, Foundations of computational mathematics (Hong Kong, 2000), World Sci. Publ., River Edge, NJ, pp. 251–266. MR2021984 (2004k:65090)

Malajovich, Gregorio e J. Maurice Rojas. 2004. *High probability analysis of the condition number of sparse polynomial systems*, Theoret. Comput. Sci. **315**, n. 2-3, 524–555, DOI 10.1016/j.tcs.2004.01.006. MR2073064 (2005e:34166)

Meer, Klaus. 2000. *Counting problems over the reals*, Theoret. Comput. Sci. **242**, n. 1-2, 41–58, DOI 10.1016/S0304-3975(98)00190-X. MR1769145 (2002g:68041)

Mizutani, Tomohiko, Akiko Takeda e Masakazu Kojima. 2007. *Dynamic enumeration of all mixed cells*, Discrete Comput. Geom. **37**, n. 3, 351–367, DOI 10.1007/s00454-006-1300-9. MR2301523 (2008b:52012)

Nazarov, Fedor e Mikhail Sodin. 2010. *Random complex zeroes and random nodal lines*, Proceedings of the International Congress of Mathematicians. Volume III, Hindustan Book Agency, New Delhi, pp. 1450–1484. MR2827851 (2012h:60177)

Peres, Yuval e Bálint Virág. 2005. *Zeros of the i.i.d. Gaussian power series: a conformally invariant determinantal process*, Acta Math. **194**, n. 1, 1–35, DOI 10.1007/BF02392515. MR2231337 (2007m:60150)

Rojas, J. Maurice. 1996. *On the average number of real roots of certain random sparse polynomial systems*, The mathematics of numerical analysis (Park City, UT, 1995), Lectures in Appl. Math., vol. 32, Amer. Math. Soc., Providence, RI, pp. 689–699. MR1421361 (97j:14060)

Shiffman, Bernard e Steve Zelditch. 2004. *Random polynomials with prescribed Newton polytope*, J. Amer. Math. Soc. **17**, n. 1, 49–108 (electronic), DOI 10.1090/S0894-0347-03-00437-5. MR2015330 (2005e:60032)

Shub, Michael. 2009. *Complexity of Bezout's theorem. VI. Geodesics in the condition (number) metric*, Found. Comput. Math. **9**, n. 2, 171–178, DOI 10.1007/s10208-007-9017-6. MR2496558 (2010f:65103)

Shub, Michael e Steve Smale. 1993a. *Complexity of Bézout's theorem. I. Geometric aspects*, J. Amer. Math. Soc. **6**, n. 2, 459–501, DOI 10.2307/2152805. MR1175980 (93k:65045)

Shub, M. e S. Smale. 1993b. *Complexity of Bezout's theorem. II. Volumes and probabilities*, Computational algebraic geometry (Nice, 1992), Progr. Math., vol. 109, Birkhäuser Boston, Boston, MA, pp. 267–285. MR1230872 (94m:68086)

Shub, Michael e Steve Smale. 1993c. *Complexity of Bezout's theorem. III. Condition number and packing*, J. Complexity **9**, n. 1, 4–14, DOI 10.1006/jcom.1993.1002. Festschrift for Joseph F. Traub, Part I. MR1213484 (94g:65152)

Shub, Michael e Steve Smale. 1996. *Complexity of Bezout's theorem. IV. Probability of success; extensions*, SIAM J. Numer. Anal. **33**, n. 1, 128–148, DOI 10.1137/0733008. MR1377247 (97k:65310)

Shub, M. e S. Smale. 1994. *Complexity of Bezout's theorem. V. Polynomial time*, Theoret. Comput. Sci. **133**, n. 1, 141–164, DOI 10.1016/0304-3975(94)90122-8. Selected papers of the Workshop on Continuous Algorithms and Complexity (Barcelona, 1993). MR1294430 (96d:65091)

Smale, Steve. 1986. *Newton's method estimates from data at one point*, computational mathematics (Laramie, Wyo., 1985), Springer, New York, pp. 185–196. MR870648 (88e:65076)

Smale, Steve. 1998. *Mathematical problems for the next century*, Math. Intelligencer **20**, n. 2, 7–15, DOI 10.1007/BF03025291. MR1631413 (99h:01033)

Sodin, M. 2000. *Zeros of Gaussian analytic functions*, Math. Res. Lett. **7**, n. 4, 371–381. MR1783614 (2002d:32030)

Sodin, Mikhail e Boris Tsirelson. 2004. *Random complex zeroes. I. Asymptotic normality*, Israel J. Math. **144**, 125–149, DOI 10.1007/BF02984409. MR2121537 (2005k:60079)

Turing, A. M. 1936. *On Computable Numbers, with an Application to the Entscheidungsproblem*, Proc. London Math. Soc. **S2-42**, n. 1, 230, DOI 10.1112/plms/s2-42.1.230. MR1577030

Weyl, Hermann. 1949. *The theory of groups and quantum mechanics*, Dover Publications, New York. XVII+422 pp.

Wiesel, Ami. 2012. *Unified Framework to Regularized Covariance Estimation in Scaled Gaussian Models*, IEEE Transactions on Signal Processing **60**, n. 1, 29–38.